

Konstruktion von Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie mit „schönen“ numerischen Werten

Maria Koth, Universität Wien

1. Gitterpunkte auf Kreisen und Kugeln

1.1 Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks

Als erstes einfaches Beispiel für die Konstruktion von Aufgabenstellungen mit ganzzahligen numerischen Werten soll die folgende Frage betrachtet werden: Wie kann man die Eckpunktskoordinaten eines Dreiecks in \mathbb{R}^2 ganzzahlig wählen, so dass auch die Koordinaten des Höhenschnittpunktes und des Umkreismittelpunktes ganzzahlig sind?

Eine einfache Möglichkeit, solche Dreiecke zu finden, besteht darin, als Dreieckseckpunkte ganzzahlige Gitterpunkte auf einem Kreis in Mittelpunktslage zu wählen und anschließend eine Translation anzuwenden.

Da, zum Beispiel, $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ ist, liegen auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 65$ insgesamt 16 Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, nämlich alle Punkte mit den Koordinaten $(\pm 8/\pm 1)$, $(\pm 7/\pm 4)$, $(\pm 4/\pm 7)$.

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, drei dieser Punkte als Dreieckseckpunkte auszuwählen. (Je nach Wahl der Punkte kann man spitzwinkelige, stumpfwinkelige oder rechtwinkelige Dreiecke erzeugen.) Alle diese Dreiecke haben den ganzzahligen Umkreismittelpunkt $U(0/0)$, und auch die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke haben ganzzahlige Koordinaten:

Bekanntlich liegen in jedem Dreieck der Umkreismittelpunkt U , der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H auf einer Geraden (= eulersche Gerade), wobei S die Strecke UH im Verhältnis 1:2 teilt. Daraus folgt, dass

$$S = U + 1/3 \cdot \overrightarrow{UH} \Leftrightarrow 3 \cdot S = 3 \cdot U + (H - U) \Leftrightarrow 3 \cdot S = H + 2 \cdot U.$$

Da $S = 1/3 \cdot (A + B + C)$ ist, kann man die Gleichung $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S$ auch in der Form $H + 2 \cdot U = A + B + C$ anschreiben.

In jedem Dreieck gilt also: $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S = A + B + C$

Diese Beziehung ermöglicht es, bei bekanntem U die Koordinaten von H einfach zu berechnen und zeigt außerdem, dass in einem Dreieck mit ganzzahligen A, B, C und U stets auch H ganzzahlige Koordinaten hat.

Beispiel:

Wählt man nun, zum Beispiel, $A(-8/-1)$, $B(7/-4)$ und $C(4/7)$ auf dem Kreis $x^2+y^2 = 65$, so hat dieses Dreieck den Umkreismittelpunkt $U(0/0)$ und den Höhenschnittpunkt $H = A + B + C = (3/2)$.

Durch Verschieben um einen Translationsvektor \vec{t} mit ganzzahligen Koordinaten erhält man ein Dreieck $A_1B_1C_1$ mit ganzzahligem Umkreismittelpunkt U_1 und ganzzahligem Höhenschnittpunkt H_1 , wobei aber U_1 nicht mehr der Nullpunkt ist.

Sei, zum Beispiel, $\vec{t} = (5/1)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= A + \vec{t} = (-8/-1) + (5/1) = (-3/0) \\ B_1 &= B + \vec{t} = (7/-4) + (5/1) = (12/-3) \\ C_1 &= C + \vec{t} = (4/7) + (5/1) = (9/8) \\ U_1 &= U + \vec{t} = (0/0) + (5/1) = (5/1) \\ H_1 &= H + \vec{t} = (3/2) + (5/1) = (8/3) \end{aligned}$$

1.2 Kreis- und Kugelaufgaben

Ganzzahlige Gitterpunkte auf Kreisen in Mittelpunktlage ermöglichen es nicht nur, Dreiecke mit ganzzahligem Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt zu finden, sondern sind beim Erstellen vieler Aufgabenstellungen aus dem Bereich der analytischen Geometrie des Kreises von Nutzen.

Beispiel:

Es sollen „schöne“ numerische Werte für A , B , g und h der folgenden Aufgabenstellung gefunden werden:

„Ein Kreis durch die Punkte A und B hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden g . Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden h sind zu ermitteln.“

Wiederum kann man von einem Kreis in Mittelpunktlage ausgehen, und die hier gewählten numerischen Werte durch Anwenden einer Translation modifizieren.

Auf dem Kreis $x^2+y^2 = 85$ liegen 16 ganzzahlige Punkte. Man wählt nun zwei Punkte A und B auf diesem Kreis, zum Beispiel $A(-2/9)$ und $B(9/2)$, und eine beliebige Gerade g durch den Kreismittelpunkt $(0/0)$, zum Beispiel $g: 3x+2y=0$.

Die Gerade h soll ganzzahlige Schnittpunkte C und D mit dem Kreis haben. Wählt man, zum Beispiel, $C(-9/-2)$ und $D(6/-7)$, so errechnet man $h: x+3y = -15$.

Nun wendet man eine Translation, zum Beispiel mit dem Schiebungsvektor $\vec{t} = (4/3)$, an. Man erhält:

$$A \mapsto A + \vec{t} = (2/12)$$

$$B \mapsto B + \vec{t} = (13/5)$$

$$M \mapsto M + \vec{t} = (4/3)$$

Durch eine Translation wird jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet. Die Gerade $g: 3x + 2y = 0$ geht daher durch die Translation in eine Gerade der Form $3x + 2y = c$ über. Da die verschobene Gerade durch den neuen Kreismittelpunkt $(4/3)$ verlaufen soll, erhält man als Bildgerade $3x + 2y = 18$. Analog dazu geht die Gerade $h: x + 3y = -15$ in die parallele Gerade $x + 3y = -2$ durch den Bildpunkt $C_1 = C + \vec{t} = (-5/1)$ über.

Die anfangs betrachtete Aufgabenstellung könnte nun folgendermaßen formuliert werden: Ein Kreis durch die Punkte $A(2/12)$ und $B(13/5)$ hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden $g: 3x + 2y = 18$. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden $h: x + 3y = -2$ sind zu ermitteln.

Beispiele für Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ mit mehreren ganzzahligen Gitterpunkten sind:

r	Gitterpunkte
5	$(\pm 3/\pm 4), (\pm 4/\pm 3), (\pm 5/0), (0/\pm 5)$
$\sqrt{50}$	$(\pm 7/\pm 1), (\pm 1/\pm 7), (\pm 5/\pm 5)$
$\sqrt{65}$	$(\pm 7/\pm 4), (\pm 4/\pm 7), (\pm 8/\pm 1), (\pm 1/\pm 8)$
$\sqrt{85}$	$(\pm 7/\pm 6), (\pm 6/\pm 7), (\pm 9/\pm 2), (\pm 2/\pm 9)$
10	$(\pm 6/\pm 8), (\pm 8/\pm 6), (\pm 10/0), (0/\pm 10)$
$\sqrt{125}$	$(\pm 11/\pm 2), (\pm 2/\pm 11), (\pm 10/\pm 5), (\pm 5/\pm 10)$
$\sqrt{145}$	$(\pm 9/\pm 8), (\pm 8/\pm 9), (\pm 12/\pm 1), (\pm 1/\pm 12)$

Analog dazu kann man, ausgehend von ganzzahligen Gitterpunkten auf Kugeln in Mittelpunktslage Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie der Kugel mit schönen numerischen Werten erstellen.

Beispiele für Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit mehreren ganzzahligen Gitterpunkten sind:

r	Zerlegung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
3	$3^2 = 0^2 + 0^2 + 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$
$\sqrt{17}$	$17 = 4^2 + 1^2 + 0^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2$
$\sqrt{18}$	$18 = 3^2 + 3^2 + 0^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2$
5	$5^2 = 0^2 + 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 + 0^2$
$\sqrt{27}$	$27 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$
6	$6^2 = 0^2 + 0^2 + 6^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2$
$\sqrt{38}$	$38 = 6^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 2^2$
7	$7^2 = 0^2 + 0^2 + 7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$
$\sqrt{57}$	$57 = 5^2 + 4^2 + 4^2 = 7^2 + 2^2 + 2^2$
9	$9^2 = 0^2 + 0^2 + 9^2 = 8^2 + 4^2 + 1^2 = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2$
$\sqrt{86}$	$86 = 5^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 9^2 = 1^2 + 6^2 + 7^2$
$\sqrt{90}$	$90 = 9^2 + 3^2 + 0^2 = 8^2 + 1^2 + 5^2 = 7^2 + 4^2 + 5^2$
$\sqrt{98}$	$98 = 7^2 + 7^2 + 0^2 = 9^2 + 4^2 + 1^2 = 8^2 + 5^2 + 3^2$
11	$11^2 = 0^2 + 0^2 + 11^2 = 7^2 + 6^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 + 6^2$
13	$13^2 = 0^2 + 0^2 + 13^2 = 0^2 + 5^2 + 12^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$
15	$15^2 = 0^2 + 0^2 + 15^2 = 14^2 + 2^2 + 5^2 = 10^2 + 2^2 + 11^2 = 10^2 + 10^2 + 5^2 = 12^2 + 9^2 + 0^2$

$$\begin{array}{l|l}
 17 & 17^2 = 0^2 + 0^2 + 17^2 = 0^2 + 8^2 + 15^2 = 1^2 + 12^2 + 12^2 = 9^2 + 8^2 + 12^2 \\
 19 & 19^2 = 0^2 + 0^2 + 19^2 = 1^2 + 6^2 + 18^2 = 17^2 + 6^2 + 6^2 = 15^2 + 6^2 + 10^2 \\
 21 & 21^2 = 0^2 + 0^2 + 21^2 = 5^2 + 4^2 + 20^2 = 11^2 + 8^2 + 16^2 = 13^2 + 4^2 + 16^2 = 19^2 + 4^2 + 8^2 = \\
 & = 14^2 + 14^2 + 7^2 = 9^2 + 6^2 + 18^2 \\
 23 & 23^2 = 0^2 + 0^2 + 23^2 = 3^2 + 6^2 + 22^2 = 3^2 + 14^2 + 18^2 = 6^2 + 13^2 + 18^2 \\
 25 & 25^2 = 0^2 + 0^2 + 25^2 = 24^2 + 7^2 + 0^2 = 20^2 + 15^2 + 0^2 = 9^2 + 12^2 + 20^2 = 12^2 + 15^2 + 16^2 \\
 27 & 27^2 = 0^2 + 0^2 + 27^2 = 7^2 + 2^2 + 26^2 = 23^2 + 2^2 + 14^2 = 25^2 + 2^2 + 10^2 = 10^2 + 10^2 + 23^2 \\
 & = 18^2 + 18^2 + 9^2 = 3^2 + 12^2 + 24^2 = 21^2 + 12^2 + 12^2
 \end{array}$$

2. Heronische Dreiecke

Als nächstes sollen nun Dreiecke in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten und ganzzahligem Inkreismittelpunkt ermittelt werden. Das führt auf den Begriff des heronischen Dreiecks.

2.1 Eigenschaften heronischer Dreiecke

Bei Dreiecken mit ganzzahligen oder mit zumindest rationalen Eckpunktskoordinaten in \mathbb{R}^2 kann man die Höhen, die Seitensymmetralen und die Schwerlinien durch Gleichungen $ax + by = c$ mit ganzzahligen Koeffizienten a , b und c beschreiben. Die Lösung eines Systems zweier solcher Gleichungen ist stets ein rationales Zahlenpaar. Daraus folgt, dass für jedes Dreieck in \mathbb{R}^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten auch die Koordinaten des Höhenschnittpunkts, des Umkreismittelpunktes und des Schwerpunktes rationale Zahlen sind. Für den Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte dagegen ist das nur bei sogenannten heronischen Dreiecken der Fall.

Den Inkreismittelpunkt I und die Ankreismittelpunkte I_1 , I_2 und I_3 eines Dreiecks mit den Eckpunkten A , B , C und den Seitenlängen a , b , c kann man relativ bequem mit Hilfe der folgenden Formeln bestimmen:

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c},$$

$$I_1 = \frac{-a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{-a + b + c}, I_2 = \frac{a \cdot A - b \cdot B + c \cdot C}{a - b + c}, I_3 = \frac{a \cdot A + b \cdot B - c \cdot C}{a + b - c}$$

Diese Formeln zeigen, dass die Punkte I , I_1 , I_2 und I_3 nur dann rationale Koordinaten haben, wenn nicht nur die Eckpunktskoordinaten, sondern auch die Seitenlängen des Dreiecks rational sind.

Unter einem **heronischen Dreieck** (auch **rationales Dreieck** genannt) versteht man ein Dreieck mit rationalen Seitenlängen und rationalem Flächeninhalt. In solchen Dreiecken sind zahlreiche weitere Bestimmungsstücke rationale Größen, zum Beispiel

- die sin-, cos- und tan-Werte der drei Dreieckswinkel,
- die drei Dreieckshöhen,
- die Abschnitte, in die die Dreiecksseiten durch die Höhenfußpunkte geteilt werden,
- die Abschnitte, in die die Höhen durch den Höhenschnittpunkt geteilt werden,
- die Seitenlängen des Höhenfußpunkttriangles,
- die Normalabstände des Schwerpunktes von den Dreiecksseiten,
- die Normalabstände des Umkreismittelpunktes von den Dreiecksseiten,
- der Umkreisradius,
- der Inkreisradius,
- die drei Ankreisradien,
- die Abschnitte, in die die Dreiecksseiten durch die Winkelsymmetralen geteilt werden,
- die Abschnitte, in die die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises zerfallen,
- die Abschnitte, in die die Seiten durch die Berührungspunkte der Ankreise zerfallen,
-

Nicht notwendigerweise rational sind dagegen:

- die Längen der Winkelsymmetralen,
- die Abschnitte, in die die Winkelsymmetralen durch den Inkreismittelpunkt geteilt werden,
- die Seitenlängen des Dreiecks $T_1T_2T_3$ mit den Berührungspunkten des Inkreises als Eckpunkten,
- die Seitenlängen des Dreiecks $I_1I_2I_3$ mit den Ankreismittelpunkten als Eckpunkten,
- die Längen der Schwerlinien (Man kann sogar zeigen, dass ein heronisches Dreieck höchstens eine rationale Schwerlinie haben kann),
-

Wird ein Dreieck in R^2 von den Seitenvektoren $\vec{a} = (a_1/a_2)$ und $\vec{b} = (b_1/b_2)$ erzeugt, so ist sein Flächeninhalt gegeben durch $A_\Delta = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$. Daraus folgt, dass jedes Dreieck in R^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten auch rationalen Flächeninhalt hat.

Aus den oben angeführten Eigenschaften heronischer Dreiecke folgt, dass in einem Dreieck in R^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten und rationalen Seitenlängen auch die folgenden Punkte rationale Koordinaten haben:

- Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt,
- Seitenmittelpunkte, Höhenfußpunkte,
- Spiegelpunkte des Höhenschnittpunktes an den drei Dreiecksseiten,
- Spiegelpunkte des Umkreismittelpunktes an den drei Dreiecksseiten,
- Inkreismittelpunkt, Berührungspunkte des Inkreises,
- Ankreismittelpunkte, Berührungspunkte der Ankreise,
- Mittelpunkt des Feuerbachkreises ($F = 0.5(U+H)$), Nagelpunkt ($N = 3.S - 2.I$),
-

Ist ABC ein heronisches Dreieck mit rationalen Eckpunktskoordinaten in R^2 , so sind auch das Höhenfußpunkttriangel und das Seitenmittendreieck von ABC sowie die Dreiecke ABH, BCH und ACH heronische Dreiecke mit rationalen Eckpunktskoordinaten.

2.2 Heronische Dreiecke in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Eckpunkten

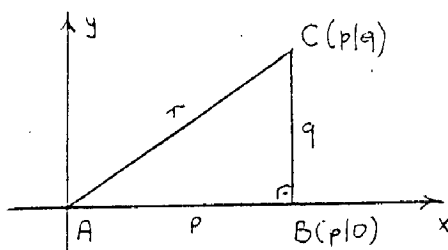
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, konkrete Zahlenbeispiele für heronische Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten in \mathbb{R}^2 zu ermitteln. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man ausgehend von pythagoreischen Zahlentripeln heronische Dreiecke erhalten kann. Da man die Lage der Dreiecke durch Translationen und Drehstreckungen verändern kann (siehe Abschnitt 3), genügt es, von einem Dreieck auszugehen, dessen Eckpunkt A der Nullpunkt ist und dessen Eckpunkt B auf der positiven x-Achse liegt.

Jedes pythagoreische Zahlentripel $(p/q/r)$ mit $p^2 + q^2 = r^2$ legt folgendermaßen ein rechtwinkliges heronisches Dreieck fest:

$$A(0/0), B(p/0), C(p/q)$$

Für diese Dreieck errechnet man:

$$H(p/0), U\left(\frac{p}{2} \mid \frac{q}{2}\right), I\left(\frac{p(p+r)}{p+q+r} \mid \frac{pq}{p+q+r}\right)$$



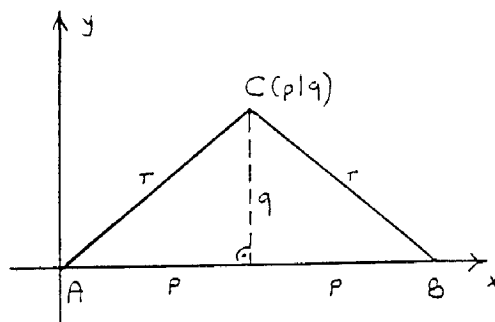
Durch Zusammenfügen zweier solcher Dreiecke erhält man ein gleichschenkeliges heronisches Dreieck:

$$A(0/0), B(2p/0), C(p/q)$$

Dieses Dreieck ist für $p < q$ spitzwinklig, für $p = q$ gleichschenkelig-rechtwinklig und für $p > q$ stumpfwinklig. Berechnung ergibt:

$$H\left(p \mid \frac{p^2}{q}\right), U\left(p \mid \frac{q^2 - p^2}{2q}\right), I\left(p \mid \frac{pq}{p+r}\right)$$

$$I_1(p+r|q), I_2(p-r|q), I_3\left(p \mid \frac{pq}{p-r}\right)$$



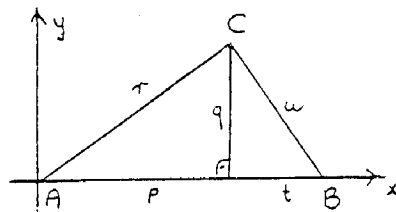
Konkrete Beispiele für solche gleichschenkeligen heronischen Dreiecke sind:

(p/p/r)	A	B	C	H	U	I	I_1	I_2	I_3
(3/4/5)	(0/0)	(6/0)	(3/4)	$(3 \mid \frac{3}{4})$	$(3 \mid \frac{7}{8})$	(3/1.5)	(8/4)	(-2/4)	(3/-6)
(4/3/5)	(0/0)	(8/0)	(4/3)	$(4 \mid \frac{16}{3})$	$(4 \mid -\frac{7}{6})$	$(4 \mid \frac{4}{3})$	(9/3)	(-1/3)	(4/-12)
(5/12/13)	(0/0)	(10/0)	(5/12)	$(5 \mid \frac{25}{12})$	$(5 \mid \frac{119}{24})$	$(5 \mid \frac{10}{3})$	(18/12)	(-8/12)	(5/-7.5)
(12/5/13)	(0/0)	(24/0)	(12/5)	(12/28.8)	(12/-11.9)	(12/2.4)	(25/5)	(-1/5)	(12/-60)
(8/15/17)	(0/0)	(16/0)	(8/15)	$(8 \mid \frac{64}{15})$	$(8 \mid \frac{161}{30})$	(8/4.8)	(25/5)	(-9/15)	$(8 \mid -\frac{40}{3})$
(7/24/25)	(0/0)	(14/0)	(7/24)	$(7 \mid \frac{49}{24})$	$(7 \mid \frac{527}{48})$	(7/5.25)	(32/24)	(-18/24)	$(7 \mid -\frac{28}{3})$

Spiegelt man den Dreieckseckpunkt C an der x-Achse, so erhält man eine Raute mit ganzzahligen Seiten- und Diagonalenlängen ($a = r$, $e = 2p$, $f = 2q$ und $h = 2pq/r$) und ganzzahligen Eckpunkten $(0/0)$, $(p/-q)$, $(2p/0)$, (p/q) .

Durch zwei pythagoreische Zahlentripel $(p/q/r)$ und $(t/q/u)$ mit gemeinsamer Kathete q werden die folgenden ungleichschenkeligen heronischen Dreiecke festgelegt:

Sei $p, q, t > 0 \wedge p > t \wedge p^2 + q^2 = r^2 \wedge t^2 + q^2 = u^2$

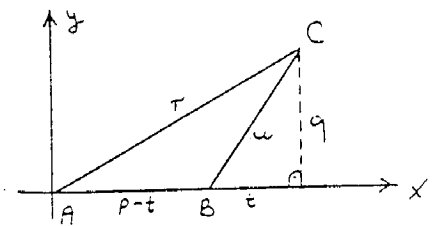


$A(0/0)$, $B(p + t/0)$, $C(p/q)$

α und β sind stets spitze Winkel,
 γ ist ein spitzer Winkel $\leftrightarrow pt < q^2$

$$H\left(p \mid \frac{pt}{q}\right), U\left(\frac{p+t}{2} \mid \frac{q^2 - pt}{2q}\right),$$

$$I\left(\frac{(p+t)(r+p)}{r+p+t+u} \mid \frac{q(p+t)}{r+p+t+u}\right)$$



$A(0/0)$, $B(p-t/0)$, $C(p/q)$

stumpfwinkeliges Dreieck
mit stumpfem Winkel B

$$H\left(p \mid \frac{-pt}{q}\right), U\left(\frac{p-t}{2} \mid \frac{pt+q^2}{2q}\right),$$

$$I\left(\frac{(p-t)(p+r)}{p-t+r+u} \mid \frac{q(p-t)}{p-t+r+u}\right)$$

Konkrete Beispiele für solche ungleichschenkeligen heronischen Dreiecke sind:

$(p/q/r)$	$(t/q/u)$	A	B	C	I	I_1	I_2	I_3
(15/8/17)	(6/8/10)	(0/0)	(21/0)	(15/8)	(14/3.5)	(24/6)	(-3/12)	(7/-28)
		(0/0)	(9/0)	(15/8)	(8/2)	(18/4.5)	(-9/36)	(1/-4)
(40/9/41)	(12/9/15)	(0/0)	(52/0)	(40/9)	$(39/\frac{13}{3})$	(54/6)	(-2/18)	(13/-117)
		(0/0)	(28/0)	(40/9)	(27/3)	$(42/\frac{14}{3})$	(-14/126)	(1/-9)
(9/12/15)	(5/12/13)	(0/0)	(14/0)	(9/12)	(8/4)	(21/10.5)	(-7/14)	(6/-12)
		(0/0)	(4/0)	(9/12)	(3/1.5)	(16/8)	(-12/24)	(1/-2)
(16/12/20)	(9/12/15)	(0/0)	(25/0)	(16/12)	(15/5)	(30/10)	(-5/15)	(10/-30)
		(0/0)	(7/0)	(16/12)	(6/2)	(21/7)	(-14/42)	(1/-3)
(16/12/20)	(5/12/13)	(0/0)	(21/0)	(16/12)	$(14/\frac{14}{3})$	(27/9)	(-6/18)	(7/-21)
		(0/0)	(11/0)	(16/12)	(9/3)	$(22/\frac{22}{3})$	(-11/33)	(2/-6)
(30/16/34)	(12/16/20)	(0/0)	(42/0)	(30/16)	(28/7)	(48/12)	(-6/24)	(14/-56)
		(0/0)	(18/0)	(30/16)	(16/4)	(36/9)	(-18/72)	(2/-8)
(36/15/39)	(20/15/25)	(0/0)	(56/0)	(36/15)	(35/7)	(60/12)	(-4/20)	(21/-105)
		(0/0)	(16/0)	(36/-48)	(15/3)	(40/8)	(-24/120)	(1/-5)
(21/20/29)	(15/20/25)	(0/0)	(36/0)	(21/20)	(20/8)	(45/18)	(-9/22.5)	(16/-40)
		(0/0)	(6/0)	(21/20)	(5/2)	(30/12)	(-24/60)	(1/-2.5)

Da bei allen bisher betrachteten heronischen Dreiecken die Seite AB auf der x-Achse liegt, ist stets die y-Koordinate des Inkreismittelpunktes gleich dem Inkreisradius des Dreiecks.

Bei jedem Dreieck ABC ist der Inkreismittelpunkt I der Höhenschnittpunkt des aus den Ankreismittelpunkten I_1, I_2, I_3 gebildeten Dreiecks, und die Punkte A, B und C sind die Höhenfußpunkte dieses Dreiecks. Somit kann man den obigen Tabellen gleichzeitig auch Dreiecke I_1, I_2, I_3 mit ganzzahligem Höhenschnittpunkt und ganzzahligen Höhenfußpunkten entnehmen.

Spiegelt man den Eckpunkt C des Dreiecks $[A(0/0), B(p+t/0), C(p/q)]$ an der x-Achse, so erhält man ein Deltoid mit ganzzahligen Seiten- und Diagonallängen ($a = r, b = u, e = p + t, f = 2q$) und ganzzahligen Eckpunkten $(0/0), (p/-q), (p+t/0), (p/q)$.

2.3 Eine andere Konstruktion heronischer Dreiecke

Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten und ganzzahligen Seitenlängen kann man auch mit Hilfe des folgenden Ansatzes ermitteln:

Die Seitenvektoren des Dreiecks ABC müssen der Bedingung $\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ genügen. Setzt man

$$\vec{BA} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{CB} = t_3 \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

so ist die Bedingung $\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ äquivalent zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2 + t_3 \cdot a_3 &= 0 \\ t_1 \cdot b_1 + t_2 \cdot b_2 + t_3 \cdot b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man, dass $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ sein muss. Setzt man den

Proportionalitätsfaktor gleich 1, so erhält man das Dreieck mit den Seitenlängen

$$\begin{aligned} a &= |BC| = |t_3| \cdot \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \cdot \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \\ b &= |AC| = |t_2| \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |a_3 b_1 - a_1 b_3| \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ c &= |AB| = |t_1| \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |a_2 b_3 - a_3 b_2| \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned}$$

Damit diese Seitenlängen rational (bzw. ganzzahlig) sind, setzt man $a_1 = 2u_1 v_1, b_1 = u_1^2 - v_1^2, a_2 = 2u_2 v_2, b_2 = u_2^2 - v_2^2, a_3 = 2u_3 v_3, b_3 = u_3^2 - v_3^2$, wobei $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ rationale (bzw. ganze) Zahlen sind.

Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \cdot (u_2 u_3 + v_2 v_3) \cdot (u_3 v_2 - u_2 v_3) \\ t_2 &= 2 \cdot (u_1 u_3 + v_1 v_3) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) \end{aligned}$$

Als Eckpunktskoordinaten des Dreiecks kann man daher wählen:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 B &= -\frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = (u_2 u_3 + v_2 v_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot u_1 v_1 \\ u_1^2 - v_1^2 \end{pmatrix}, \\
 C &= \frac{1}{2} \cdot t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = (u_1 u_3 + v_1 v_3) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot u_2 v_2 \\ u_2^2 - v_2^2 \end{pmatrix}, \\
 \text{wobei } \vec{u} &= (u_1/u_2/u_3) \text{ und } \vec{v} = (v_1/v_2/v_3) \text{ beliebige Elemente von } Z^3 \text{ sind.}
 \end{aligned}$$

Konkrete Zahlenbeispiele für mit diesem Ansatz ermittelte heronische Dreiecke sind:

A	B	C	H	U	I	I ₁	I ₂	I ₃
(0/0)	(14/0)	(32/-24)	(32/24)	(7/-24)	(12/-4)	(42/-14)	(-28/-84)	(2/6)
(0/0)	(18/-24)	(-14/0)	(18/24)	(-7/-24)	(-2/-4)	(-42/-84)	(-12/6)	(28/-14)
(0/0)	(9/12)	(-7/0)	(9/-12)	(-3.5/12)	(-1/2)	(-21/42)	(-6/-3)	(14/7)
(0/0)	(15/36)	(-33/0)	(15/-20)	(-16.5/28)	(-6/9)	(-66/99)	(-27/-18)	(33/22)
(0/0)	(12/9)	(12/16)	(24/0)	(0/12.5)	(10/10)	(15/15)	(30/30)	(5/-5)
(0/0)	(12/16)	(24/0)	(12/9)	(12/3.5)	(12/6)	(32/16)	(12/-24)	(-8/16)
(0/0)	(9/12)	(25/0)	(9/12)	(12.5/0)	(10/5)	(30/15)	(15/-30)	(-5/10)
(0/0)	(-12/16)	(12/9)	(0/0)	(0/12.5)	(1/7)	(6/42)	(14/-2)	(-21/3)
(0/0)	(32/24)	(-18/24)	(0/0)	(7/24)	(2/14)	(12/84)	(-28/4)	(42/-6)
(0/0)	(20/15)	(-36/15)	(0/-33)	(-8/31.5)	(-1/8)	(-15/120)	(-40/-5)	(24/3)
(0/0)	(24/0)	(12/9)	(12/16)	(12/-3.5)	(12/4)	(27/9)	(-3/9)	(12/-36)
(0/0)	(12/-9)	(-12/-9)	(0/7)	(0/-12.5)	(0/-5)	(0/-45)	(-15/0)	(15/0)

3. Anwendung von Koordinatentransformationen

Hat man Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie mit ganzzahligen numerischen Werten vorgegeben, so kann man die Zahlenwerte durch Anwenden geeigneter affiner Transformationen rasch modifizieren.

3.1 Grundlagen

Bekanntlich versteht man unter einer **affinen Transformation** im R^n eine Abbildung $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ der Form $\varphi: X \mapsto A \cdot X + T$, wobei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und $T \in R^n$ ein fixer Translationsvektor ist.

Eine affine Abbildung setzt sich also aus einer linearen Abbildung und einer Translation zusammen. Sie ist genau dann bijektiv, wenn der Wert der Determinante von A ungleich Null ist.

Durch eine bijektive affine Abbildung wird

- jeder Punkt des \mathbb{R}^n auf einen Punkt des \mathbb{R}^n , jede Gerade auf eine Gerade und jede Ebene auf eine Ebene abgebildet,
- Das Teilverhältnis dreier Punkte auf einer Geraden bleibt invariant. (Daher wird insbesondere der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet).
- Parallele Vektoren (Geraden) werden auf parallele Vektoren (Geraden) abgebildet.

Wichtige Beispiele affiner Transformationen sind die Kongruenzabbildungen und die Ähnlichkeitsabbildungen:

Für Kongruenzabbildungen gilt außerdem, dass sie

- Winkel zwischen Vektoren invariant lassen (Daher werden insbesondere zwei zueinander normale Geraden auf zueinander normale Geraden abgebildet),
- Streckenlängen, Flächeninhalte und Volumina invariant lassen.

Für Ähnlichkeitsabbildungen gilt über die allgemeinen Eigenschaften affiner Abbildungen hinaus, dass sie

- wie Kongruenzabbildungen Winkel zwischen Vektoren invariant lassen
- und dass jede Strecke auf eine Strecke mit genau k -facher Länge abgebildet wird.

Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen in \mathbb{R}^n können folgendermaßen charakterisiert werden:

Eine **Kongruenzabbildung** (Bewegung) im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $\varphi: X \mapsto A \cdot X + T$ wobei A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix und $T \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Translationsvektor ist.

Eine **Ähnlichkeitsabbildung** im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $\varphi: X \mapsto k \cdot A \cdot X + T$ wobei A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, k eine positive reelle Zahl und $T \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Translationsvektor ist.

Orthogonale Matrizen sind reelle $n \times n$ -Matrizen, deren Zeilenvektoren ein Orthonormalsystem bilden, d.h. jeder Zeilenvektor hat Betrag 1 und das Skalarprodukt $A_i \cdot A_j$ zweier verschiedener Zeilenvektoren hat den Wert Null.

Orthogonale 2×2 -Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sind demnach jene 2×2 -Matrizen, die der Bedingung $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \wedge ac + bd = 0$ genügen.

Alle diese Matrizen sind von der Form $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

Der erste Typus beschreibt eine Drehung mit dem Ursprung als Drehzentrum und dem Drehwinkel α , der zweite eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\alpha/2$.

3.2 Beispiele für Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen im \mathbb{R}^2

a) Translationen

Die einfachste Möglichkeit, Punkte mit ganzzahligen Koordinaten durch eine Kongruenzabbildung in Punkte mit ganzzahligen Koordinaten abzubilden, besteht darin, eine Translation anzuwenden.

$$X \mapsto X + T, \quad (x/y) \mapsto (x + t_1 / y + t_2)$$

b) „Triviale“ orthogonale Abbildungen

Einfach anzuwenden sind auch die folgenden orthogonalen Abbildungen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der y-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der x-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 180^\circ$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der ersten Mediane}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der zweiten Mediane}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 90^\circ$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 270^\circ$$

Da jede orthogonale 2×2 -Matrix von der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist, kann es (abgesehen von der Einheitsmatrix) keine weiteren orthogonalen 2×2 -Matrizen mit ganzzahligem a und b geben.

Beispiel:

Das Dreieck ABC [$A(-6/0)$, $B(9/-3)$, $C(6/8)$] hat den Höhenschnittpunkt $H(5/3)$ und den Umkreismittelpunkt $U(2/1)$.

- Durch Anwenden der Translation $X \mapsto X + T$ mit $T = (2/-1)$ erhält man das kongruente Dreieck $A_1B_1C_1$ mit dem Höhenschnittpunkt H_1 und dem Umkreismittelpunkt U_1 :

$$A_1 = A + T = (-6/0) + (2/-1) = (-4/-1)$$

$$B_1 = B + T = (9/-3) + (2/-1) = (11/-4)$$

$$C_1 = C + T = (6/8) + (2/-1) = (8/7)$$

$$H_1 = H + T = (5/3) + (2/-1) = (7/2)$$

$$U_1 = U + T = (2/1) + (2/-1) = (4/0)$$

- Durch Vertauschen der Koordinaten und anschließendes Addieren des Vektors $T(-2/1)$, d.h. durch Anwenden der Kongruenzabbildung $(x / y) \mapsto (y - 2 / x + 1)$ erhält man das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ mit dem Höhenschnittpunkt H_2 und dem Umkreismittelpunkt U_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= (0/-6) + (-2/1) = (-2/-5) \\ B_2 &= (-3/9) + (-2/1) = (-5/10) \\ C_2 &= (8/6) + (-2/1) = (6/7) \\ H_2 &= (3/5) + (-2/1) = (1/6) \\ U_2 &= (1/2) + (-2/1) = (-1/3) \end{aligned}$$

Faustregel:

Wendet man auf die Koordinaten aller gegebenen Punkte eine (oder mehrere) der folgenden Umformungen an, so liegt eine Kongruenzabbildung vor:

- zur x-Koordinate eine fixe reelle Zahl c addieren,
- zur y-Koordinate eine fixe reelle Zahl d addieren
- das Vorzeichen der x-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der y-Koordinate ändern
- die beiden Koordinaten vertauschen

c) Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele für Ähnlichkeitsabbildungen, die ganzzahlige Koordinaten in ganzzahlige Koordinaten überführen, lassen sich einfach finden: Jede Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ von der Form

$$X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ das heißt } (x / y) \mapsto (ax + by + t_1 / -bx + ay + t_2)$$

oder $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ das heißt } (x / y) \mapsto (ax + by + t_1 / bx - ay + t_2)$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $T = (t_1/t_2) \in \mathbb{Z}^2$ ist eine solche Abbildung.

Konkrete Beispiele sind etwa:

- $(x / y) \mapsto (x + y / -x + y)$
- $(x / y) \mapsto (-x + y / -x - y)$
- $(x / y) \mapsto (2x + y / -x + 2y)$
- $(x / y) \mapsto (3x + y / -x + 3y)$
- $(x / y) \mapsto (-2x + y / -x - 2y)$
- $(x / y) \mapsto (2x + 3y / -3x + 2y)$
- $(x / y) \mapsto (3x + 2y / -2x + 3y)$
-

3.3 Beispiele für Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen im \mathbb{R}^3

a) Kongruenzabbildungen:

Beispiele für Kongruenzabbildungen im \mathbb{R}^3 , die ganzzahlige Koordinaten in ganzzahlige Koordinaten überführen, sind analog zu Abschnitt 3.2:

- alle Translationen mit ganzzahligem Translationsvektor im \mathbb{R}^3
- und alle „trivialen“ orthogonalen Abbildungen im \mathbb{R}^3 (Insgesamt gibt es 48 orthogonale Matrizen, bei denen jeder Zeilenvektor einmal die Eintragung ± 1 und sonst nur die Eintragung 0 enthält).

Analog zum \mathbb{R}^2 kann man die folgende Faustregel formulieren:

Faustregel:

Wendet man auf die Koordinaten aller gegebenen Punkte eine (oder mehrere) der folgenden Umformungen an, so liegt eine Kongruenzabbildung vor:

- zur x-Koordinate eine fixe reelle Zahl c addieren,
- zur y-Koordinate eine fixe reelle Zahl d addieren
- zur z-Koordinate eine fixe reelle Zahl e addieren
- das Vorzeichen der x-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der y-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der z-Koordinate ändern
- x- und y-Koordinaten vertauschen
- x- und z-Koordinaten vertauschen
- y- und z-Koordinaten vertauschen

b) Ähnlichkeitsabbildungen:

Durch systematisches Probieren kann man Beispiele für Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit

ganzzahligen Eintragungen $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ finden, die den Bedingungen $a^2+b^2+c^2 = d^2+e^2+f^2 = g^2+h^2+i^2 \wedge ad+be+cf = ag+bh+ci = dg+eh+fi = 0$ genügen.

So führt etwa der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ auf die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ und auf die Bei-

spiele $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 5 & 0 \\ -5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \dots$

Der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ führt auf die Bedingung $ac + ab + bc = 0$, und auf die Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -3 & 4 & 12 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -6 & 10 & 15 \\ 15 & -6 & 10 \\ 10 & 15 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 5 & -4 & 20 \\ 20 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \dots$$

Der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ führt auf die Bedingung $a+c+d = 0 \wedge b^2 = -2ac$ und auf die Bei-

spiele $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 12 & 8 \\ 12 & 1 & 12 \\ 8 & 12 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 & 6 & 1 \\ 6 & 17 & 6 \\ 1 & 6 & -18 \end{pmatrix}, \dots$

3.4 Prismen, Tetraeder und Pyramiden mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten

Eckpunktskoordinaten von Würfeln, Prismen, Tetraedern, Pyramiden,...in besonderer Lage zu den Koordinatenebenen kann man ganz einfach angeben, zum Beispiel:

Würfel: $[A(0/0/0), B(1/0/0), C(1/1/0), D(0/1/0), E(0/0/1), F(1/0/1), G(1/1/1), H(0/1/1)]$

Regelmäßiges Tetraeder: $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(0/0/1), D(1/1/1)]$

Regelmäßiges Oktaeder: $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(-1/0/0), D(0/-1/0), E(0/0/1), F(0/0/-1)]$

Quadratische Pyramide mit Kantenlänge a und Höhe h : $[A(0/0/0), B(a/0/0), C(a/a/0), D(0/a/0), S(\frac{1}{2}a / \frac{1}{2}a / h)]$

.....

Wendet man auf diese Eckpunkte eine Ähnlichkeitsabbildung an, so erhält man einen ähnlichen Körper mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten in allgemeiner Lage zu den Koordinatenebenen.

Beispiel 1:

Durch die Ähnlichkeitsabbildung

$$X \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

dh. $(x / y / z) \mapsto (-2x+6y+3z+5 / 3x-2y+6z-1 / 6x+3y-2z+6)$

werden die Eckpunkte des regelmäßigen Tetraeders $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(0/0/1), D(1/1/1)]$ mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ auf die Eckpunkte des regelmäßigen Tetraeders

$[A_1(3/2/12), B_1(11/-3/9), C_1(8/5/4), D_1(12/6/13)]$
mit der Kantenlänge $7\sqrt{2}$ abgebildet. (Da jeder Zeilenvektor der obigen Matrix Absolutbetrag 7 hat, ist jede Bildstrecke 7-mal so lang wie die Urstrecke.)

Beispiel 2

Eine gerade quadratische Pyramide kann man durch Angabe der Koordinaten des Basiseckpunkts A, der Spitze S und eines Normalvektors \vec{n} der Grundflächenebene festlegen. So wird durch $A(0/0/0)$, $S(2/2/5)$ und $\vec{n} = (0/0/1)$ eine Pyramide mit Grundkantenlänge 4 und Höhe 5 festgelegt, deren Grundfläche in der xy-Ebene liegt.

Anwenden der Ähnlichkeitsabbildung $X \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{aligned} A &= (0/0/0) \mapsto A_1 = (0/0/0) + (-4/-3/7) = (-4/-3/7) \\ S &= (2/2/5) \mapsto S_1 = (12/12/3) + (-4/-3/7) = (8/9/10) \\ \vec{n} &= (0/0/1) \mapsto \vec{n}_1 = (2/2/-1) \end{aligned}$$

(Man beachte: Da eine affine Transformation $\varphi(x) = A \cdot X + t$ einen Vektor \overrightarrow{PQ} auf den Vektor $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi(Q) - \varphi(P) = (A \cdot Q + t) - (A \cdot P + t) = A \cdot Q - A \cdot P = A \cdot (Q - P) = A \cdot \overrightarrow{PQ}$ abbildet, ist der Normalvektor \vec{n} nur mit der Matrix zu multiplizieren).

Durch den Basiseckpunkt $A_1(-4/-3/7)$, die Spitze $S_1(8/9/10)$ und den Normalvektor $\vec{n}_1 = (2/2/-1)$ der Grundflächenebene wird nun eine gerade quadratische Pyramide mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten festgelegt, deren Grundflächenebene nicht mehr parallel zur xy-Ebene liegt. Da jeder Zeilenvektor der verwendeten Ähnlichkeitsmatrix den Betrag 3 hat, hat diese Pyramide die Grundkantenlänge $4 \cdot 3 = 12$ und die Höhe $5 \cdot 3 = 15$.

Beispiel 3

Es sollen „schöne“ numerische Werte für die folgende Aufgabenstellung gefunden werden: „Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man eine Gleichung der Grundflächenebene sowie Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten. Die dritte Seitenkante stehe auf die Grundfläche normal. Die Eckpunktskoordinaten der Pyramide sind zu bestimmen.“

Wieder kann man von einer Pyramide in besonderer Lage zu den Koordinatenebenen ausgehen:

Sei, zum Beispiel, $A(0/0/0)$, $B(6/0/0)$, $C(4/3/0)$ und $D(4/3/5)$. Dann liegen die Punkte A, B, C in der xy-Ebene, und die Seitenkante CD steht auf die Grundflächenebene ABC normal.

Anwenden der Ähnlichkeitsabbildung $X \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ergibt die Bildpunkte

$$A_1(5/-3/-5), B_1(-1/9/7), C_1(7/2/9), D_1(17/12/4).$$

Als Gleichung der Ebene $A_1B_1C_1$ ermittelt man $2x + 2y - z = 9$, Gleichungen der Trägergeraden der Kanten A_1D_1 bzw. B_1D_1 sind gegeben durch: $g: X = (9/2/-2) + t \cdot (4/5/3)$ bzw. $h: X = (5/10/6) + u \cdot (6/1/-1)$.

4. Orthotetraeder

Im Unterschied zu Dreiecken hat nicht jedes Tetraeder einen Höhenschnittpunkt. Tetraeder, deren vier Höhen sich in einem Punkt H schneiden, werden als **Orthotetraeder** bezeichnet. Im Folgenden werden einige interessante Eigenschaften von Orthotetraedern aufgelistet, und es wird gezeigt, wie man konkrete numerische Beispiele für Orthotetraeder erzeugen kann.

4.1 Orthotetraeder mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten:

Um konkrete numerische Beispiele für Eckpunktskoordinaten eines Orthotetraeders zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wählt man die Eckpunkte $A(0/0/0)$, $B(x_1/0/0)$ und $C(x_2/y_2/0)$ in der xy -Ebene. Der Höhenschnittpunkt H_{ABC} des Dreiecks ABC ist gegeben durch $H_{ABC}\left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / 0\right)$.

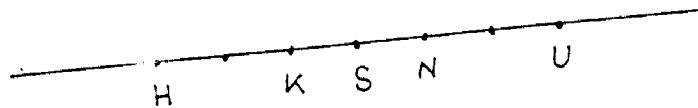
Wählt man nun den vierten Tetraedereckpunkt $D\left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / z_3\right)$ lotrecht über dem Punkt H_{ABC} , so bilden A, B, C und D ein Orthotetraeder. Der Höhenschnittpunkt H dieses Tetraeders ist gegeben durch $H\left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / -\frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} \cdot \frac{(x_2(x_1 - x_2) - y_2^2)}{y_2 z_3}\right)$.

Konkrete Zahlenbeispiele sind (diese Werte können durch Ähnlichkeitsabbildungen bequem verändert werden):

A	B	C	D	H	U
(0/0/0)	(6/0/0)	(4/2/0)	(4/4/4)	(4/4/-2)	(3/-1/4)
(0/0/0)	(10/0/0)	(4/4/0)	(4/6/4)	(4/6/-3)	(5/-1/5)
(0/0/0)	(14/0/0)	(8/4/0)	(8/12/4)	(8/12/-24)	(7/-4/26)
(0/0/0)	(6/0/0)	(2/4/0)	(2/2/4)	(2/2/1)	(3/1/1)
(0/0/0)	(10/0/0)	(6/4/0)	(6/6/4)	(6/6/-3)	(5/-1/5)
(0/0/0)	(4/0/0)	(1/1/0)	(1/3/3)	(1/3/-2)	(2/-1/3.5)
(0/0/0)	(14/0/0)	(5/3/0)	(5/15/9)	(5/15/-20)	(7/-6/24.5)
(0/0/0)	(3/0/0)	(1/1/0)	(1/2/2)	(1/2/-1)	(1.5/-0.5/2)
(0/0/0)	(4/0/0)	(2/1/0)	(2/4/2)	(2/4/-6)	(2/-1.5/7)
(0/0/0)	(4/0/0)	(1/3/0)	(1/1/2)	(1/1/1)	(2/1/0)
(0/0/0)	(10/0/0)	(4/6/0)	(4/4/4)	(4/4/2)	(5/1/0)
(0/0/0)	(14/0/0)	(8/4/0)	(8/12/8)	(8/12/-12)	(7/-4/16)

Die folgende Auflistung von Eigenschaften solcher Orthotetraeder ist als Anregung für mögliche Aufgabenstellungen gedacht:

- Die windschiefen Gegenkanten AB und CD (bzw. BC und AD bzw. BD und AC) liegen zueinander orthogonal, und für ihre Längen gilt: $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = t^2$.
- Die Mittelpunkte der sechs Tetraederkanten liegen auf einer Kugel mit dem Tetraederschwerpunkt $S = (A+B+C+D)/4$ als Mittelpunkt und dem Radius $t/4$.
- Der Schwerpunkt S ist der Mittelpunkt der Strecke HU, wobei U den Umkugelmittelpunkt des Tetraeders bezeichnet.
- Die Schwerpunkte der vier Seitenflächen und die Fußpunkte der vier Tetraederhöhen liegen auf einer Kugel mit Mittelpunkt K und Radius $r/3$ (wobei r den Umkugelradius des Tetraeders bezeichnet, und K jener Punkt auf der Geraden durch H, S und U ist, der die Strecke HS im Verhältnis 2:1 teilt).
- Die in den Schwerpunkten der vier Seitenflächen auf diese errichteten normalen Geraden schneiden einander in einem Punkt N. N liegt auf der Geraden durch H, K, S und U, und es gilt $\overline{HN} = 4/3 \cdot \overline{HS}$.



4.2 Rechtwinkelige Orthotetraeder

Besonders einfache Orthotetraeder erhält man, wenn man $x_3 = 0$ setzt: In diesem Fall liegen alle vier Eckpunkte sowie drei der sechs Seitenkanten auf den Koordinatenachsen. Drei der vier Seitenflächen sind paarweise aufeinander normal stehende rechtwinkelige Dreiecke, und der Höhenschnittpunkt fällt mit dem Eckpunkt $A(0/0/0)$ zusammen.

Für rechtwinkelige Orthotetraeder mit den Eckpunkten $A(0/0/0)$, $B(a/0/0)$, $C(0/b/0)$, $D(0/0/c)$ und $a, b, c > 0$ gilt:

- Die Eckpunkte B, C und D sind die Schnittpunkte der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mit den drei Koordinatenachsen.
- Drei der vier Tetraederhöhen fallen mit den Kanten AB, AC und AD zusammen, die Höhen haben die Längen $h_1 = a$, $h_2 = b$, $h_3 = c$ und $h_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$.
- Für die Längen zueinander windschiefer Gegenkanten gilt:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = t^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

- $H = A = (0/0/0)$, $S = \left(\frac{a}{4} / \frac{b}{4} / \frac{c}{4}\right)$, $U = \left(\frac{a}{2} / \frac{b}{2} / \frac{c}{2}\right)$, $K = \left(\frac{a}{6} / \frac{b}{6} / \frac{c}{6}\right)$, $N = \left(\frac{a}{3} / \frac{b}{3} / \frac{c}{3}\right)$
- Der Umkugelradius ist gegeben durch $r = t/2$.
- Das Tetraeder hat den Inkugelmittelpunkt $I(\rho/\rho/\rho)$ und den Inkugelradius ρ , wobei

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}}$$

Konkrete Zahlenbeispiele sind:

A	B	C	D	U	ρ
(0/0/0)	(8/0/0)	(0/4/0)	(0/0/4)	(4/2/2)	1
(0/0/0)	(10/0/0)	(0/25/0)	(0/0/15)	(5/12.5/7.5)	3
(0/0/0)	(8/0/0)	(0/6/0)	(0/0/2)	(4/3/1)	3/4
(0/0/0)	(2/0/0)	(0/7/0)	(0/0/5)	(1/3.5/2.5)	5/7
(0/0/0)	(6/0/0)	(0/9/0)	(0/0/3)	(3/4.5/1.5)	1
(0/0/0)	(4/0/0)	(0/7/0)	(0/0/7)	(2/3.5/3.5)	7/6
(0/0/0)	(6/0/0)	(0/7/0)	(0/0/7)	(3/3.5/3.5)	7/5
(0/0/0)	(12/0/0)	(0/21/0)	(0/0/21)	(6/10.5/10.5)	7/2

Zahlenbeispiele für rechtwinkelige Orthotetraeder mit ganzzahligen Eckpunkten $A(0/0/0)$, $B(a/0/0)$, $C(0/b/0)$, $D(0/0/c)$ und rationalem Inkugelradius ρ kann man folgendermaßen ermitteln:

Falls $a, b, c > 0$ sind, kann man die Trägerebene der Seitenfläche BCD durch eine Gleichung $ux + vy + wz = p$ mit $u, v, w, p > 0$ beschreiben (Dann ist $a = p/u$, $b = p/v$ und $c = p/w$). Der Inkugelmittelpunkt $I(\rho/\rho/\rho)$ liegt unterhalb dieser Ebene und hat von ihr den Abstand ρ . Daraus folgt:

$$\rho = \frac{|u \cdot \rho + v \cdot \rho + w \cdot \rho - p|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = -\frac{u \cdot \rho + v \cdot \rho + w \cdot \rho - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

(c) Umformen dieses Ausdrucks ergibt:
$$\rho = \frac{p}{u + v + w + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Wählt man daher positive ganze Zahlen u, v, w so, dass $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ eine ganze Zahl ist (siehe dazu die Tabelle in Abschnitt 1.2), und wählt man p als gemeinsames Vielfaches von u, v und w , so erhält man ein Orthotetraeder mit ganzzahligen Kantenlängen a, b, c und rationalem Inkugelradius ρ .

5. Ganzzahlige Punkte auf Ellipsen und Hyperbeln

Die Gleichung $x^2 + v \cdot y^2 = a^2$ beschreibt für $v \in \mathbb{R}^+$ eine Ellipse und für $v \in \mathbb{R}^-$ eine Hyperbel (jeweils mit den Hauptscheiteln $(-a/0)$, $(a/0)$ und den Nebenscheiteln $\left(0 / \frac{a}{\sqrt{|v|}}\right)$, $\left(0 / -\frac{a}{\sqrt{|v|}}\right)$).

Für jedes $i \in \mathbb{R}$ mit $i^2 \neq -1/v$ wird nun durch

$$\varphi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -iv \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - ivy / ix + y),$$

eine bijektive lineare Transformation festgelegt, die den Kegelschnitt $k_1: x^2 + v \cdot y^2 = a^2$ auf den Kegelschnitt $k_2: x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$ abbildet. Darüber hinaus bildet φ_i auch die Tangente an k_1 in einem Punkt $T \in k_1$ auf die Tangente an k_2 im Bildpunkt $\varphi_i(T) \in k_2$ ab, und allgemein entspricht der Polaren eines Punktes $P \in \mathbb{R}^2$ bezüglich k_1 als Bildgerade die Polare des Punktes $\varphi_i(P)$ bezüglich k_2 .

Mit Hilfe dieser Transformation φ_i kann man relativ einfach ganzzahlige Punkte auf Kegelschnitten finden, deren Tangenten an den Kegelschnitt ebenfalls ganzzahlige Schnittpunkte haben (Im Folgenden wird für $X = (x/y) \in \mathbb{R}^2$ die Bezeichnung $-X = (-x/-y)$ und $X^* = (x/-y)$ verwendet.):

Ist $T = (x_0/y_0)$ ein Punkt auf dem Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2$, so liegen die Punkte

$$T_1 = \varphi_i(T) = (x_0 - ivy_0/ix_0 + y_0) \quad \text{und} \quad T_2 = \varphi_i(T^*) = (x_0 + ivy_0/ix_0 - y_0)$$

sowie die Punkte $-T_1, T_1^*, -T_1^*, -T_2, T_2^*, -T_2^*$ auf dem Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$. Als Schnittpunkte der Tangenten an den Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$ mit diesen Berührungspunkten errechnet man:

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } T_2: \quad \left(\frac{a^2}{x_0} / \frac{a^2 i}{x_0} \right)$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } -T_2: \quad \left(-\frac{a^2 i}{y_0} / \frac{a^2}{vy_0} \right)$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } T_2^*: \quad (x_0(1+i^2v) / y_0(1+i^2v))$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } -T_2^*: \quad \left(-\frac{y_0(1+i^2v)}{i} / \frac{x_0(1+i^2v)}{iv} \right)$$

Alle übrigen Tangentenschnittpunkte liegen symmetrisch zu einem dieser vier Punkte (bzw. liegen auf einer Koordinatenachse).

Ellipse bzw. Hyperbel:	Punkte auf dem Kegelschnitt:		Schnittpunkt der Tangenten an den Kegelschnitt mit den Berührungspunkten:			
	T ₁	T ₂	T ₁ und T ₂	T ₁ und -T ₂	T ₁ und T ₂ *	T ₁ und -T ₂ *
$x^2 + 2y^2 = 27$	(-3/3)	(5/-1)	(9/9)	(-4.5/2.25)	(3/6)	(-6/1.5)
$x^2 + 2y^2 = 54$	(-2/5)	(6/3)	(3/6)	(-12/3)	(18/9)	(-4.5/4.5)
$x^2 + 2y^2 = 114$	(-4/7)	(8/5)	(3/9)	(-18/3)	(38/19)	(-6 $\frac{1}{3}$ /6 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 2y^2 = 198$	(-6/9)	(10/7)	(3/12)	(-24/3)	(66/33)	(-8.25/8.25)
$x^2 + 3y^2 = 52$	(-5/3)	(7/1)	(4/8)	(-8/ $\frac{2}{3}$)	(13/13)	(- $\frac{13}{2}$ / $\frac{13}{2}$)
$x^2 + 3y^2 = 84$	(-3/5)	(9/1)	(7/7)	(-10.5/3.5)	(12/8)	(-8/4)
$x^2 + 3y^2 = 156$	(-3/7)	(9/5)	(4/8)	(-24/4)	(39/13)	(-6.5/6.5)
$x^2 + 3y^2 = 273$	(-9/8)	(15/4)	(7/14)	(-21/3.5)	(39/26)	(-13/6.5)
$x^2 + 3y^2 = 588$	(-9/13)	(15/11)	(4/16)	(-48/4)	(147/49)	(-12.25/12.25)
$x^2 + 4y^2 = 40$	(-2/3)	(6/1)	(4/4)	(-8/2)	(10/5)	(-5/2.5)
$x^2 + 4y^2 = 80$	(-4/4)	(8/2)	(4/6)	(-12/2)	(20/10)	(-6 $\frac{2}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 136$	(-6/5)	(10/3)	(4/8)	(-16/2)	(34/17)	(-8.5/4.25)
$x^2 + 4y^2 = 200$	(-2/7)	(10/5)	(5/7.5)	(-30/5)	(40/10)	(-6 $\frac{2}{3}$ /6 $\frac{2}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 200$	(-10/5)	(14/1)	(10/15)	(-15/2.5)	(20/20)	(-13 $\frac{1}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 208$	(-8/6)	(12/4)	(4/10)	(-20/2)	(52/26)	(-10.4/5.2)
$x^2 + 4y^2 = 340$	(-4/9)	(12/7)	(5/10)	(-40/5)	(68/17)	(-8.5/8.5)
$x^2 + 4y^2 = 340$	(-14/6)	(18/2)	(10/20)	(-20/2.5)	(34/34)	(17/4.25)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-6/11)	(14/9)	(5/12.5)	(-50/5)	(104/26)	(-10.4/10.4)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-18/7)	(22/3)	(10/25)	(-25/2.5)	(52/52)	(-20.8/5.2)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-14/9)	(18/7)	(4/16)	(-32/2)	(130/65)	(-16.25/8.125)
$x^2 + 5y^2 = 54$	(-3/3)	(7/-1)	(12/6)	(-6/2.4)	(4.5/4.5)	(-9/1.8)
$x^2 + 5y^2 = 126$	(-9/3)	(11/1)	(6/12)	(-12/1.2)	(21/21)	(-10.5/2.1)
$x^2 + 5y^2 = 189$	(-8/5)	(12/3)	(4.5/9)	(-18/1.8)	(42/21)	(-10.5/4.2)
$x^2 + 5y^2 = 270$	(-5/7)	(15/3)	(9/9)	(-22.5/4.5)	(30/12)	(-12/6)
$x^2 + 5y^2 = 276$	(-14/4)	(16/2)	(6/18)	(-18/1.2)	(46/46)	(-15 $\frac{1}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 5y^2 = 486$	(-19/5)	(21/3)	(6/24)	(-24/1.2)	(81/81)	(-20.25/4.05)
$x^2 + 5y^2 = 504$	(-18/6)	(22/2)	(12/24)	(-24/2.4)	(42/42)	(-21/4.2)
$x^2 + 5y^2 = 630$	(-5/11)	(15/9)	(6/12)	(-60/6)	(105/21)	(-10.5/10.5)
$2x^2 + 3y^2 = 115.5$	(4.5/5)	(7.5/1)	(7/3.5)	(-10.5/14)	(8.25/2.75)	(-5.5/11)
$2x^2 + 3y^2 = 210$	(-3/8)	(9/4)	(5/10)	(-15/5)	(21/14)	(-7/7)
$2x^2 + 3y^2 = 435$	(-6/11)	(12/7)	(5/15)	(-22.5/5)	(43.5/29)	(-9 $\frac{2}{3}$ /9 $\frac{2}{3}$)
$2x^2 + 3y^2 = 750$	(-9/14)	(15/10)	(5/20)	(-30/5)	(75/50)	(-12.5/12.5)
$3x^2 + 4y^2 = 336$	(-2/9)	(10/3)	(7/10.5)	(-14/7)	(16/12)	(-8/8)
$3x^2 + 4y^2 = 624$	(-10/9)	(14/3)	(8/24)	(-16/4)	(26/39)	(-13/6.5)
$3x^2 + 4y^2 = 912$	(-2/15)	(14/9)	(8/16)	(-32/12)	(38/19)	(-9.5/14.25)
$x^2 - y^2 = 24$	(7/5)	(5/-1)	(4.5/1.5)	(-3/-9)	(5 $\frac{1}{3}$ /2 $\frac{1}{3}$)	(-8/-16)
$x^2 - y^2 = 27$	(14/13)	(6/-3)	(3.6/1.8)	(-2.25/-4.5)	(7.5/6)	(-12/-15)
$x^2 - y^2 = 45$	(9/6)	(7/-2)	(6/1.5)	(-3/-12)	(7.5/3.75)	(-15/-30)
$x^2 - y^2 = 63$	(12/9)	(8/1)	(8.4/4.2)	(-10.5/-21)	(7.5/3)	(-6/-15)
$x^2 - y^2 = 72$	(11/7)	(9/3)	(9.6/4.8)	(-24/-48)	(7.5/1.5)	(-3/-15)
$2x^2 - y^2 = 14$	(5/6)	(3/-2)	(2/1)	(-1/-4)	(3.5/3.5)	(-7/-14)
$2x^2 - y^2 = 23$	(6/7)	(4/-3)	(2.5/1)	(-1/-5)	(4.6/4.6)	(-11.5/-23)

$2x^2 - y^2 = 62$	(9/10)	(7/-6)	(4/1)	(-1/-8)	(7.75/7.75)	(-31/-62)
$4x^2 - y^2 = 63$	(6/9)	(4/1)	(4.2/4.2)	(-5.25/-21)	(3.75/3)	(-3/-15)
$4x^2 - y^2 = 96$	(7/10)	(5/-2)	(4.5/3)	(-3/-18)	(5 $\frac{1}{2}$ /5 $\frac{1}{2}$)	(-8/-32)
$4x^2 - y^2 = 180$	(9/12)	(7/-4)	(6/3)	(-3/-24)	(7.5/7.5)	(-15/-60)
$4x^2 - y^2 = 288$	(11/14)	(9/-6)	(7.5/3)	(-3/-30)	(9.6/9.6)	(-24/-96)
$x^2 - 2y^2 = 7$	(5/3)	(3/1)	(3.5/1.75)	(-7/-7)	(2/0.5)	(-1/-2)
$x^2 - 2y^2 = 14$	(8/5)	(4/-1)	(3/1)	(-2/-3)	(4 $\frac{1}{3}$ /2 $\frac{1}{3}$)	(-7/-7)
$x^2 - 2y^2 = 28$	(10/6)	(6/-2)	(4/1)	(-2/-4)	(7/3.5)	(-14/-14)
$x^2 - 2y^2 = 34$	(14/9)	(6/1)	(6.8/3.4)	(-8.5/-8.5)	(5/2)	(-4/-5)
$x^2 - 2y^2 = 98$	(14/7)	(10/-1)	(9 $\frac{1}{2}$ /2 $\frac{1}{2}$)	(-7/-14)	(10.5/3.5)	(-14/-21)
$x^2 - 3y^2 = 6$	(9/5)	(3/-1)	(1.5/0.5)	(-1/-1)	(4/2)	(-6/-4)
$x^2 - 3y^2 = 78$	(15/79)	(9/-1)	(8/2)	(-6/-8)	(9.75/3.25)	(-13/-13)
$x^2 - 3y^2 = 132$	(18/8)	(12/-2)	(10/2)	(-6/-10)	(13.2/4.4)	(-22/-22)
$x^2 - 3y^2 = 132$	(30/16)	(18/-8)	(6/1)	(-2/-4)	(22/11)	(-66/-44)
$x^2 - 3y^2 = 198$	(21/9)	(15/-3)	(12/2)	(-6/-12)	(16.5/5.5)	(-33/-33)
$x^2 - 4y^2 = 180$	(18/6)	(14/2)	(15/3.75)	(-30/-30)	(12/1.5)	(-6/-12)
$x^2 - 4y^2 = 252$	(24/9)	(16/1)	(16.8/4.2)	(-21/-21)	(15/3)	(-12/-15)
$x^2 - 4y^2 = 288$	(22/7)	(18/3)	(19.2/4.8)	(-48/-48)	(15/1.5)	(-6/-15)
$2x^2 - 3y^2 = 15$	(9/7)	(3/-1)	(2/1)	(-1.5/-2)	(3.75/2.5)	(-5/-5)
$2x^2 - 3y^2 = 45$	(12/9)	(6/-3)	(3/1)	(-1.5/-3)	(7.5/5)	(-15/-15)
$2x^2 - 3y^2 = 141$	(18/3)	(12/-7)	(5/1)	(-1.5/-5)	(14.1/9.4)	(-47/-47)
$2x^2 - 3y^2 = 150$	(15/10)	(9/-2)	(7.5/2.5)	(-5/-10)	(10/5)	(-15/-20)
$3x^2 - 2y^2 = 30$	(8/9)	(4/3)	(5/5)	(-10/-15)	(2/1)	(-1/-3)
$3x^2 - 2y^2 = 138$	(15/14)	(10/-9)	(4/1)	(-1/-6)	(11.5/11.5)	(-46/-69)
$4x^2 - 3y^2 = 24$	(9/10)	(3/2)	(4/4)	(-6/-8)	(1.5/1)	(-1/-2)
$4x^2 - 3y^2 = 132$	(15/16)	(9/-8)	(3/1)	(-1/-4)	(11/11)	(-33/-44)
$4x^2 - 3y^2 = 312$	(15/14)	(9/-2)	(8/4)	(6/-16)	(9.75/6.5)	(-13/-26)

Literatur:

- Altshiller-Court, N.: College Geometry. Barnes & Noble Books, New York, 1952.
- Baptist, P.: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. B.I. Verlag, Mannheim, 1992.
- Engel, A.: Mathematisches Experimentieren mit dem PC. Klett-Verlag, Stuttgart, 1991.
- Johnson, R.A.: Advanced Euclidian Geometry. Dover Publications, New York, 1960.
- Lode, H.: Rationale Dreiecke und einfache Orthotetraeder in der analytischen Geometrie. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.
- Mitsch, H.: Lineare Algebra und Geometrie I und II. Prugg Verlag, Wien 1978.
- Neubrand, M.: Analoga im Tetraeder zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks. In Praxis der Mathematik 27 (1985)
- Renner, C.: Planimetrie. Ehrenwirth Verlag, München 1950.
- Schuler, K.: Heronische Dreiecke auf Gitterpunkten. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.
- Seebach, K.: Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern. In Didaktik der Mathematik 11(1983) und 12(1984).
- Walter, H.: Rationale und ganzzahlige Elemente in Verbindung mit dem Durchmesserbegriff bei Ellipse und Hyperbel. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.